

# Problem Set 20: 循环群与群同构

提交截止时间：5 月 13 日 10:00

## Problem 1

对以下各小题给定的群  $G_1$  和  $G_2$ ，以及  $f: G_1 \rightarrow G_2$ ，说明  $f$  是否为群  $G_1$  到  $G_2$  的同态，如果是，说明是否为单同态、满同态和同构，并求同态像  $f(G_1)$ 。

(1)  $G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ,  $G_2 = \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$ , 其中  $\mathbb{R}^*$  为非零实数集合， $+$  和  $\cdot$  分别表示数的加法和乘法。

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是偶数} \\ -1 & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

(2)  $G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ,  $G_2 = \langle A, \cdot \rangle$ , 其中  $+$  和  $\cdot$  分别表示数的加法和乘法,  $A = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge |x| = 1\}$ , 其中  $\mathbb{C}$  为复数集合。

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

## Problem 2

令  $G, G'$  为群，函数  $f: G \rightarrow G'$  是一个群同态。证明：

(1)  $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = e\}$  是  $G$  的子群。

(2)  $\text{Im} f = \{x \in G' \mid \exists g \in G, f(g) = x\}$  是  $G'$  的子群

## Problem 3

设  $G_1$  为循环群， $f$  是群  $G_1$  到  $G_2$  的同态，证明  $f(G_1)$  也是循环群。

## Problem 4

设  $\phi$  是群  $G$  到  $G'$  的同构映射， $a \in G$ ，证明： $a$  的阶和  $\phi(a)$  的阶相等。

## Problem 5

证明：三阶群必为循环群.

## Problem 6

设  $p$  是素数, 证明每一个  $p$  阶群都是循环群, 且以每一个非单位元的元素作为它的生成元.

## Problem 7

请简述对以下评论的理解: “对数概念的产生本质上是人们认识到正实数的乘法群和实数的加法群同构.”

## Problem 8

对于阶数是  $pq$  的交换群  $G$  (其中  $(p, q) = 1$ ), 若存在元素  $a, b \in G$ , 满足  $a$  的阶数为  $p$ ,  $b$  的阶数为  $q$ , 证明  $G$  是一个循环群.

## Problem 9

证明: 子群个数有限的群一定是有限群.

## Problem 10

证明: 无限群  $G$  是循环群当且仅当  $G$  与它的每个真子群同构.